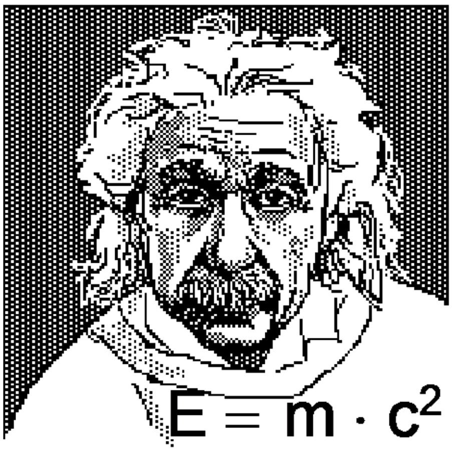
6 3º ESO

«En la resolución de todo problema hay un cierto descubrimiento»

Polya. Matemático



Ecuaciones

ÍNDICE:

ENIGMAS

1. LA CONTRASEÑA

El guardián de una muralla dice:
- DIECIOCHO
- nueve, —contesta el de fuera y le deja pasar—
- CATORCE —dice a un segundo—
- siete, —responde este y también pasa—

Un espía que escucha los diálogos cree haber encontrado la clave y se acerca a la puerta:
- DIEZ, —dice el guardián—
- cinco, —responde él—. Pero es hecho preso.

¿Qué debía haber contestado?

2. EL TEXTO ANTIGUO

En un manuscrito antiguo aparece una multiplicación con bastantes números ilegibles. ¿Eres capaz de descifrarlos?

				1	
		x	3		2
				3	
	3		2		
	2		5		
1		8		3	0

3. DESCOLOCADOS

Calcula el valor de x, y, z según la información del recuadro:

x	y	z	
3	5	6	Hay un valor correcto y además en su sitio
1	4	7	Hay una cifra correcta pero no está en su siti
8	4	2	Hay una cifra correcta y en su sitio
6	2	1	Hay una cifra correcta pero no está en su sit
9	2	3	No hay ninguna cifra correcta

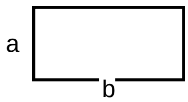
1. EL LENGUAJE SIMBÓLICO O ALGEBRAICO

• Es el que expresa relaciones numéricas en que intervienen cantidades variables o cantidades desconocidas (incógnitas). Por no tener un valor fijo; o bien, por ser desconocido se representan mediante letras.

• Esto ocurre en las fórmulas.

Un rectángulo tiene una base y una altura. Abreviadamente escribimos base—b— y altura —a—.

El área o superficie del rectángulo es la base por la altura. Esto sería una fórmula que abreviadamente escribimos A = b · a



El área de un rectángulo es la base por la altura: A = b · a

En este caso la medida de los lados se representan mediante letras porque son variables. Varían de un rectángulo a otro.

• Y también en las **ecuaciones**:

Un número (x) más el siguiente (x + 1) suman 15. ¿De qué números se trata?

Esto me da la ecuación siguiente:

x + (x + 1) = 15

Identidad

No hay que confundir una ecuación con una identidad.

Una identidad es una igualdad que siempre es cierta.

Identidad numérica: 8 + 4 =12

Identidad literal: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

• El Álgebra es la parte de las matemáticas que estudia el lenguaje simbólico. Proviene del árabe y significa **restaurar** (en el siglo IX, el álgebra era entre los árabes el arte de restaurar y poner en su sitio los huesos rotos). Los barberos de la España del siglo XVI, que, además de dedicarse a afeitar, sacaban sangre y arreglaban huesos, solían tener un rótulo en sus locales que decía ALGEBRISTA Y SANGRADOR.

2. REGLAS DE TRASPOSICIÓN

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución. Las reglas que vamos a ver ahora nos permiten pasar de una ecuación a otra equivalente.

• Son las reglas de paso de un miembro a otro de una ecuación o de una fórmula.

• Todas las reglas se pueden resumir en que se obtiene una ecuación equivalente; es decir, se mantiene la igualdad, haciendo lo mismo en los dos miembros.

Detalladamente serían:

1. Si un número está sumando a un miembro puede pasar al otro restándole.	x + 4 = 7	x = 7 – 4

2. Si un nº está restando a un miembro pasará sumando al otro.	$3x - 5 = 12$	$3x = 12 + 5$
3. Si un nº está multiplicando a un miembro pasará dividiendo al otro miembro.	$3 \cdot (x - 6) = 9$	$x - 6 = \frac{9}{3}$
4. Si dividiendo, multiplicando.	$\frac{5x - 8}{3} = 6$	$5x - 8 = 6 \cdot 3$
5. Si se cambia de signo a un miembro también hay que cambiar al otro miembro.	$-8x + 5 = 2x - 9$	$+8x - 5 = -2x + 9$
6. Un nº que esté operando a los dos miembros de la misma forma se puede eliminar.	a) $5x - \cancel{8} = 6x - \cancel{8}$ b) $(2x + 3) \cdot \cancel{4} = (-2 + x) \cdot \cancel{4}$ c) $\frac{x + 3}{\cancel{7}} = \frac{2x - 9}{\cancel{7}}$	a) $5x = 6x$ b) $(2x + 3) = (-2 + x)$ c) $x + 3 = 2x - 9$

• Por ejemplo, vamos a aplicarlas sucesivamente para dejar sola a la *x* en la siguiente ecuación:

$$\frac{5x + 4}{2} = 12 \xrightarrow{4.\ \text{propiedad}} 5x + 4 = 12 \cdot 2; \quad 5x + 4 = 24$$

$$5x + 4 = 24 \xrightarrow{1.\ \text{propiedad}} 5x = 24 - 4; \quad 5x = 20$$

$$5x = 20 \xrightarrow{3.\ \text{propiedad}} x = \frac{20}{5} = 4$$

• Prueba tú con la ecuación siguiente: $3x + 7 = 13$

• Álgebra es una palabra de origen árabe que significa precisamente trasposición de términos.

ECUACIÓN

Ecuación viene del término latino **aequatio**, que significa, igualación. Está pues emparentado con **igual** (aequis en latín). Es decir, con las palabras:

Ecuador: Igual distancia de los polos.

Equilátero: Tres lados iguales.

Equivalentes: Que tienen igual valor.

Una ecuación es una igualdad con incógnitas. Es decir, con valores desconocidos que representaremos con letras.

Llamaremos solución de una ecuación a aquellos valores que sustituidos en las incógnitas cumplan la igualdad.

Por ejemplo, $3x + 7 = 13$ es una ecuación.

$x = 2$ es una solución porque

$$3 \cdot 2 + 7 = 13$$

Resolver una ecuación es el proceso que seguimos para hallar el valor de la incógnita.

La solución obtenida de una ecuación se comprueba sustituyendo su valor en la incógnita y viendo si se verifica la igualdad.

3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

• Son igualdades con incógnitas de grado 1.

P. ejemplo: $3x + 7 = 13$

• Para resolverlas seguiremos en este orden los siguientes pasos (aunque no hagamos todos):

1. Operar los paréntesis.
2. Reducir a común denominador los dos miembros. Eliminarlos
3. Agrupar las x.
4. Despejar la x.
5. Comprobar la solución.

¡NUNCA DES MÁS DE UN PASO A LA VEZ!

• Ejemplo.-

Resolvemos la siguiente ecuación:

$$4x + 5 = 2(x + 3) + 7 \xrightarrow{\text{Quitar paréntesis}} 4x + 5 = 2x + 6 + 7$$

$$4x + 5 = 2x + 13 \xrightarrow{\text{Agrupar las x}} 4x - 2x = 13 - 5$$

$$2x = 8 \xrightarrow{\text{despejar la x}} x = \frac{8}{2} = 4 \qquad x = 4$$

Comprobación:

$$4 \cdot 4 + 5 \overset{?}{=} 2(4 + 3) + 7; \qquad 16 + 5 \overset{?}{=} 2 \cdot 7 + 7; \qquad 21 \overset{?}{=} 14 + 7; \qquad 21 = 21$$

• Otro ejemplo:

$$\frac{x+4}{2} + 1 = \frac{x}{3} + 4 \xrightarrow{\text{Común denominador}} \frac{3x+12}{6} + \frac{6}{6} = \frac{2x}{6} + \frac{24}{6}$$

$$\frac{3x + 12 + 6}{6} = \frac{2x + 24}{6} \xrightarrow{\text{quitar denominadores}} 3x + 12 + 6 = 2x + 24$$

$$3x + 18 = 2x + 24 \xrightarrow{\text{agrupar x}} 3x - 2x = 24 - 18; \qquad x = 6$$

Comprobación: $\frac{6+4}{2} + 1 \overset{?}{=} \frac{6}{3} + 4; \qquad \frac{10}{2} + 1 \overset{?}{=} 2 + 4; \qquad 5 + 1 \overset{?}{=} 2 + 4; \qquad 6 = 6$

PROBLEMAS

Ejercicio	**Problema**
• Contexto matemático	• Contexto real
• Tipo teórico	• Tipo práctico
• Cuestión general	• Cuestión particular, concreta.

• Un problema científico es cualquier situación que contiene algún valor desconocido (incógnita) del que se tienen ciertos datos.

• Resolver el problema es hallar el valor de la incógnita que cumple las condiciones.

• ¿CÓMO SE RESUELVEN?

Hay que seguir estos cuatro pasos:

1º. PLANTEAMIENTO: 1. Localizar la incógnita y asignarle la *x*. 2. Expresar el enunciado en función de ella. 3. Plantear la ecuación.	**2º. RESOLUCION:** 4. Resolver la ecuación.
3º. SOLUCION: 5. Redactar la solución.	**4º. COMPROBACIÓN:** 6. Comprobar que la solución es válida.

• Ejemplo 1:

La suma de dos números consecutivos es 25. ¿Cuánto vale cada uno?

PLANTEAMIENTO	**RESOLUCIÓN:**	**SOLUCIÓN:**	**COMPROBACIÓN**
1. Número desconocido: **x.** 2. Número siguiente: **x + 1** 3. Ecuación: **x + (x + 1) = 25**	2x + 1 = 25	Redactar la solución: Los números que cumplen las condiciones son	

• Ejemplo 2:

Pagué 132 Pts por el precio de un artículo más el 10% de IVA. ¿Cuánto valdrá sin IVA?

PLANTEAM.	**RESOLUCIÓN:**	**SOLUCIÓN:**	**COMPROB.**
1. Precio sin IVA: **x.** 2. IVA: **10% de x** $= \frac{10}{100} \cdot x$ 3. Ecuación: $x + \frac{10}{100} \cdot x = 132$			

SIEMPRE DEBES SEGUIR ESTOS PASOS Y PONERLOS EN EL CUADERNO.

4. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

<table>
<tr>
<td>

1 Lenguaje algebraico:

• **Relaciones numéricas** entre **cantidades variables o desconocidas**.

Se representan **mediante letras**.

• Ocurre en las **fórmulas**. $A = b \cdot a$

• En las **ecuaciones:**

x + (x+1) = 15

</td>
<td>

2 Operación fundamental:

• Divide a la expresión en **dos partes**.

• $\frac{3x + 1}{2} + 4$ La **suma.**

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3 Reglas de trasposición:

• **Reglas de paso** de un miembro a otro.

• **Sólo se puede pasar** al otro miembro lo que forme parte de **la operación fundamental**

• Son:

1. **Sumando ——> restando**
2. **Restando ——> sumando**.
3. **Multiplicando ——>dividiendo**.
4. **Dividiendo ——> multiplicando**.
5. **Cambio de signo** dos miembros.
6. **Se puede eliminar números que estén operando de la misma forma**.

</td>
<td>

4 Ecuaciones de primer grado

• Son **igualdades** con **incógnitas de grado 1**.

P. ejemplo: $3x + 7 = 13$

• La **solución** es el valor de *x* que verifica la igualdad.

• Pasos para resolverla:

1. Operar los **paréntesis**.
2. Reducir a común **denominador** los dos miembros. Eliminarlos
3. **Agrupar las x**.
4. **Despejar** la x.

</td>
</tr>
</table>

5 Problemas

• **Situación que contiene algún valor desconocido** (incógnita) del que se tienen ciertos datos.

• Hay que seguir estos cuatro pasos:

Dos números consecutivos que suman 25:

PLANTEAMIENTO	RESOLUCIÓN:	SOLUCIÓN:	COMPROBACIÓN
1. Número desconocido: **x.** 2. Número siguiente: **x + 1** 3. Ecuación: **x + (x + 1) = 25**	$2x + 1 = 25$ $2x = 25 – 1$ $2x = 24$ $x = \frac{24}{2} = 12$	Redactar la solución: Los números que cumplen las condiciones son el x = 12 y el x + 1 = 13	12 + 13 = 25

5. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación se dice de 2º grado si tiene incógnitas elevadas al cuadrado.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Por ejemplo, $3x^2 + 2x - 4 = 0$
En el caso anterior:

término de grado 2	a =	término de grado 1	b =	término independiente	c =

Las soluciones de la ecuación general se hallan mediante la fórmula siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \end{cases}$$

Una solución se obtiene con el + y la otra con el –.

• Por ejemplo:

$$2x^2 + 6x + 4 = 0 \to x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2.2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} =$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{-6 \pm 2}{4} = \begin{cases} \dfrac{-6+2}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \\ \dfrac{-6-1}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

Ejemplo: $-x^2 + 7x - 10 = 0$

• Resuelve: $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Discriminante

El número de soluciones depende del valor de $b^2 - 4ac$ que se llama discriminante.
¿Cuántas soluciones tendrán las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 2 = 0 \\ 2x^2 + x + 4 = 0 \\ 3x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases}$$

6. ECUACIONES INCOMPLETAS

Sin término de grado 1

¿Cuáles son las soluciones de:?

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = 16 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = -9 \\ x^2 = -25 \end{array}\right\}$$ *Todo número positivo tiene dos raíces, el 0 una y los negativos ninguna.*

¿Cuáles son las soluciones de?

$$\left.\begin{array}{l} (x-1)^2 = 9 \\ (x+2)^2 = 16 \\ (x-3)^2 = 0 \\ (x-2)^2 = -9 \\ (x+3)^2 = -25 \end{array}\right\}$$

Sin término independiente. Ecuaciones factorizadas

• Las ecuaciones sin término independiente se pueden factorizar.

Por ejemplo:

$$2x^2 + 4x = 0 \rightarrow x \cdot (2x+4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = \dfrac{-4}{2} \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

Y por lo tanto luego se resuelven como ecuaciones factorizadas.

De estas ecuaciones el 0 siempre es solución.

• Resuelve: $3x^2 + 6x = 0$

Ahora de grado 3:

$$x^3 + 12x^2 - 64x = 0$$

Ecuaciones factorizadas

• Una ecuación está factorizada si es el producto de factores igualado a cero.

Las soluciones serán los valores que hagan cero alguno de los dos factores.

Por ejemplo:

$(x-3)\cdot(x+7) = 0$	$\begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3 \\ \text{o bien} \\ x + 7 = 0 \rightarrow x_2 = -7 \end{cases}$	Como vemos salen dos soluciones x1=3 y otra x2 = –7

• Resuelve: (x–4)·(x+7)=0

Resuelve: x·(x+2)=0

Resuelve: x·(x+1)·(x+5)=0

Resuelve: (2x – 4) · (3x – 5) = 0

• Invéntate una ecuación factorizada que tenga de soluciones: $x_1 = 5$ y $x_2 = 7$

Lo mismo para otros valores.

7. FACTORIZACIÓN DE ECUACIONES. RESOLUCIÓN

Para resolver ecuaciones de grado superior a 2 procederemos por factorización de la ecuación.

Las soluciones son precisamente los ceros del polinomio.

Resolver:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

8. ECUACIONES RACIONALES

Por ejemplo,

$$\frac{8}{x} = \frac{x+6}{5}$$

Multiplicamos en cruz y resolvemos la ecuación resultante.

$8 \cdot 5 = x \cdot (x + 6)$

9. ECUACIONES BICUADRADAS

Son las ecuaciones del tipo:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Haciendo el cambio que se indica se convierten en una de 2° grado:

$$y = x^2 \rightarrow ay^2 + by + c = 0$$

Ejemplo

Lo mismo para: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Resolver la ecuación: $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$.

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -2 \vee x = 2$$

Diferencias entre un polinomio y una ecuación

10. ECUACIONES CON RADICALES. IRRACIONALES

Son las ecuaciones que contienen radicales:

Se resuelven aislando la raíz en un miembro y elevando al cuadrado.

Ejemplo

Resolver: $\sqrt{x} + 2 = x$

Resolver la ecuación: $\sqrt{x+1} + 4 = 2x$

Importante

En las irracionales siempre hay que comprobar la soluciones hipotéticas para asegurar la verdadera solución